日水研報告，(33)：141－145，1982.
Bull. Jap. Sea Reg. Fish. Res. Lab., (33)：141－145, 1982.

短　報

年齢組成が不明な場合のサケの回帰率推定法

赤嶺達郎[1]・能勢幸雄[2]
清水　誠[2]

A Method of Estimating Salmon Returning Rate When the Age Compositions of Returned Groups are Unknown.

TATSURO AKAMINE[1], YUKIO NOSE[2]
AND MAKOTO SHIMIZU[2]

Abstract

The mathematical model of this estimation is in the form of simultaneous linear equations:

$$\begin{pmatrix} R^*_5 \\ R_6 \\ | \\ R_{n+2} \\ R^*_{n+3} \\ R^*_{n+4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t4 & t3 & t2 & & & \\ t5 & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & t2 \\ & & & \ddots & \ddots & t3 \\ & & & & t5 & t4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ | \\ C_{n-2} \\ C_{n-1} \\ C_n \end{pmatrix}$$

R_i: returned number in i year
C_i: returned number of i year class group
tk: rate of k age number in C_i

The method of solving this equation is Gaussian elimination. When $t2=t5=0$, it can be solved easily. The inverse matrix makes it easy to estimate the effects of parameters: R^* and tk.

1) 〒951 新潟市水道町1丁目5939－22
日本海区水産研究所
(Japan Sea Regional Fisheries Research Laboratory, Suido-cho, Niigata 951, Japan)
2) 〒113 東京都文京区弥生1－1－1
東京大学農学部
(Faculty of agriculture, University of Tokyo, Bunkyo, Tokyo 113, Japan)

サケ (*Oncorhynchus keta*) の回帰率の算出法は，従来放流4年後の回帰尾数を放流尾数で除すことで計算されてきた．しかし，近年，種苗放流事業が盛んになるにつれて，また，国際的な問題もからんで，より正確な回帰率の推定値が必要となり，回帰群の年齢組成調査等が行なわれている．また，比較のため，過去のデータから，より正確な回帰率を計算する手法もあわせて検討されている．

ここでは年級群において，一定の比率で2～5年後に回帰するモデルをつくり，連立方程式を解くことによつて回帰率を求める方法について述べるとともに，大槌川の調査例に適用させてその有効性を検討したので，その結果を報告する．

モ　デ　ル

i 年度における放流尾数を E_i，回帰尾数を R_i とおく．また i 年度に放流された年級群の回帰尾数を C_i とおき，k 年後に回帰する比率を tk_i とおく．このとき $\sum_k tk_i=1$ で，一般には $t4_i>t3_i>t2_i, t5_i$ である．求める回帰率は $P_i=C_i/E_i$ となる．E_i と R_i は与えられている．したがつて問題は R_i から C_i を求めることである．モデルは

$$R_{i+4}=t2_{i+2}\,C_{i+2}+t3_{i+1}\,C_{i+1}+t4_i\,C_i+t5_{i-1}\,C_{i-1} \quad \text{——(1)}$$

となる．これより連立方程式をつくり R_i から C_i を求める．このとき

1）未知数と方程式の数を一致させる．
2）係数行列の主対角線上に最大値が並ぶようにする．

以上の2点を留意する必要がある．2）は数値解析上安定な解を得るための条件である．これより連立方程式は

$$\begin{pmatrix} R^*_5 \\ R_6 \\ | \\ R_{n+2} \\ R^*_{n+3} \\ R^*_{n+4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t4_1 & t3_2 & t2_3 & & & \\ t5_1 & t4_2 & t3_3 & t2_4 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & t5_{n-3} & t4_{n-2} & t3_{n-1} & t2_n \\ & & & t5_{n-2} & t4_{n-1} & t3_n \\ & & & & t5_{n-1} & t4_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ | \\ C_{n-2} \\ C_{n-1} \\ C_n \end{pmatrix} \text{——(2)}$$

$$\begin{cases} R^*_5=R_5-t5_0\,C_0 \\ R^*_{n+3}=R_{n+3}-t2_{n+1}\,C_{n+1} \\ R^*_{n+4}=R_{n+4}-t3_{n+1}\,C_{n+1}-t2_{n+2}\,C_{n+2} \end{cases}$$

$$\sum_k tk_i=1$$

となる．R^* には推定値を代入する．(2)を

$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{Tc}$ ——②′

と略記する．$\boldsymbol{T}$ の値は不明なので

$$\boldsymbol{T}_4=\begin{pmatrix} t4 & t3 & t2 & & \\ t5 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & t2 \\ & & \ddots & \ddots & t3 \\ & & & t5 & t4 \end{pmatrix} \text{——③}$$

で代用する．従来の方法は $t4=1$ とした場合と解釈できる．

比較のため年齢組成より求める方法を②と同様にモデル化すると

$$\begin{pmatrix} C^*_1 \\ C^*_2 \\ C_3 \\ | \\ C_{n-1} \\ C^*_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} s4_5\ s5_6 & & & & \\ s3_5\ s4_6\ s5_7 & & & & \\ s2_5\ s3_6\ s4_7\ s5_8 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & s2_{n+1} & s3_{n+2} & s4_{n+3} & s5_{n+4} \\ & & s2_{n+2} & s3_{n+3} & s4_{n+4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_5 \\ R_6 \\ R^7 \\ | \\ R_{n+3} \\ R_{n+4} \end{pmatrix} \text{——④}$$

$$\begin{cases} C^*_1=C_1-s3_4\ R_4-s2_3\ R_3 \\ C^*_2=C_1-s2_4R_4 \\ C^*_n=C_n-s5_{n+5}\ R_{n+5} \end{cases}$$

$$\sum_k sk_i=1$$

となる．これを

$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{Sr}$ ——④′

と略記する．tk_i と sk_i の関係は

$tk_i\ C_i=sk_{i+k}\ R_{i+k}$ ——⑤

であり，tk_i は⑤式より sk_i から求められる．従来の方法は $s4=1$ とおいた場合とも解釈できる．

解　　法

1. ガウスの消去法

解法は小型計算機を用いてガウスの消去法によつて行なつた．この場合②式と③式は同様に扱えるので②式に従つて説明する．

$$\left(\begin{array}{cccc|c} t4_1\ t3_2\ t2_3 & & & & R^*_5 \\ t5_1\ t4_2\ t3_3\ t2_4 & & & & R_6 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & | \\ t5_{n-3} & t4_{n-2} & t3_{n-1} & t2_n & R_{n+2} \\ & t5_{n-2} & t4_{n-1} & t3_n & R^*_{n+3} \\ & & t5_{n-1} & t4_n & R^*_{n+4} \end{array}\right) \text{——⑥}$$

とおく．これより前進消去を行なう．上から順番に

$$\begin{cases} t4'_i=t4_i-P_i\cdot t3'_i \\ t3'_i=t3_i-P_i\cdot t2_i \\ R'_{i+4}=R_{i+4}-P_i\cdot R'_{i+3} \end{cases} \text{——⑦}$$

$$P_i=\frac{t5_{i-1}}{t4'_{i-1}}$$

として $t5_i$ を消去する．

$$\left(\begin{array}{ccc|c} t4_1\ t3_2\ t2_3 & & & R^*_5 \\ t4'_2\ t3'_3\ t2_4 & & & R'_6 \\ \ddots & \ddots & \ddots & | \\ t4'_{n-2} & t3'_{n-1} & t2_n & R'_{n+2} \\ & t4'_{n-1} & t3'_n & R^{*\prime}_{n+3} \\ & & t4'_n & R^{*\prime}_{n+4} \end{array}\right) \text{——⑧}$$

次に後退代入は，$C'_{n+1}=C'_{n+2}=0$ とおいて下から順番に

$$C'_i=\frac{R'_{i+4}-t3'_{i+1}\ C'_{i+1}-t2_{i+2}\ C'_{i+2}}{t'4_i} \text{——⑨}$$

を計算してすべての C'_i を得る．

2. 簡　便　法

$t4$ と $t3$ で9割を占めるので $t2$, $t5$ は無視しても影響は小さい．そこで

$$\boldsymbol{T}_2=\begin{pmatrix} t4 & t3 & \\ & \ddots & \ddots \\ & & t3 \\ & & t4 \end{pmatrix} \text{——⑩}$$

とおくと，これは後退代入だけで解くことができる．$C''_{n+1}=0$ とおいて下から順番に

$$C''_i=\frac{R_{i+4}-t3C''_{i+1}}{t4} \text{——⑪}$$

を計算してすべての C''_i を得る．

3. 逆　行　列

tk, R^* はパラメータと解釈できる．これらの値を変化させてより適切な値を得ることができる．$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{Tc}$ より $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{r}$ なので $\boldsymbol{T}^{-1}$ を求めることにより tk, R^* の影響を判断できる．

簡便法では

$$\boldsymbol{T}_2^{-1}=\frac{1}{t4}\begin{pmatrix} 1 & -Q & Q^2 & \cdots & (-Q)^{n-1} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & | \\ & & \ddots & \ddots & Q^2 \\ & & & \ddots & -Q \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \text{——⑫} \quad Q=\frac{t3}{t4}$$

となる．⑪，⑫式より $R^*_{n+4}=\theta$ とおくと

$C''_i=A_i+B_i\theta$ ——⑬

$$\begin{cases} A_i=\dfrac{R_{i+4}-Q\cdot A_{i+1}}{t4} \\ B_i=\dfrac{(-Q)^{n-i}}{t4} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0\leqq\theta\leqq R_{n+4} \\ A_n=0 \end{array}$$

より $i=n$ から順番に小さい方へ求めることことができる．⑬式は能勢ら（1980）の式と同等のものである．

第１表　大槌川のサケのデータ

Table 1. Returned salmon data in Oozuchi river.

i	E_i ($\times$10)	P_i (%)	C_i	$t2C_i$	$t3C_i$	$t4C_i$	$t5C_i$	R_i
1	510	.244	1243		313	774	156	
2	1471	.091	1350	27	507	657	159	
3	3934	.326	12823	369	2056	9199	1199	
4	4004	.070	2789	212	932	1574	71	4733
5	1150	.115	1318	81	535	666	36	1892
6	3005	.045	1351	231	843	222	55	3080
7	7936	.090	7114	263	1045	5055	751	10371
8	2633	.186	4892	41	906	3414	526	3537
9	1062	.178	1891	114	546	1174	57	1844
10	1911	.215	4118	415	1746	1862	95	1344
11	7880	.044	3469	293	1351	1546	279	6130
12	5745	.243	13975	379	2281	9783	1532	5132
13	3663	.364	13338	276	2901	5724	437	3739
14	3643	.152	5522	562	2029	2850	81	3649
15	4639	.196	9113	441	4304	4152	216	4197
16	11328	.246	27815	1123	3436	21655	1625	17526
17	8868	.824	73108	7227	45269	20794		9726
18				415	5720			8714
19				736				14895
20								67555
21								28426

第２表　回帰率の計算結果

Table 2. Result of calculation for returning rate.

i	C_i	R_{i+4}	$C'^{1)}$	$C''^{2)}$
1	1243	1892	5762	5795
2	1350	3080	−6963	−4213
3	12823	10371	18490	14487
4	2789	3537	1843	3933
5	1318	1844	4598	2917
6	1351	1344	−3331	165
7	7114	6130	6991	3187
8	4892	5132	7611	10732
9	1891	3739	−312	−3628
10	4118	3649	12397	15261
11	3469	4197	−14234	−14514
12	13975	17526	32862	33463
13	13338	9726	−3899	−7401
14	5522	8714	36999	36514
15	9113	14895	−50780	−34768
16	27815	67555	112854	92573
17	73108	28425	18501	28425

1) $t2=.058$, $t3=.343$, $t4=.536$, $t5=.063$
$R^*_1=(1-t5)R_1$, $R^*_{16}=(1-t2)R_{16}$, $R^*_{17}=(t4+t5)R_{17}$

2) $t3=.390$, $t4=.610$, $R^*_{17}=t4R_{17}$

第3表　$\boldsymbol{T}$および$\boldsymbol{T}^{-1}$の要素

Table 3.　Elements of matrix: $\boldsymbol{T}$ and $\boldsymbol{T}^{-1}$.

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}
62.3 & 37.6 & 2.9 & & & & & & & & & & & & & & \\
12.6 & 48.7 & 16.0 & 7.6 & & & & & & & & & & & & & \\
 & 11.8 & 71.7 & 33.4 & 1.4 & & & & & & & & & & & & \\
 & & 9.4 & 56.4 & 40.6 & 17.1 & & & & & & & & & & & \\
 & & & 2.5 & 50.5 & 62.4 & 3.7 & & & & & & & & & & \\
 & & & & 2.7 & 16.4 & 14.7 & 0.8 & & & & & & & & & \\
 & & & & & 4.1 & 71.1 & 18.5 & 6.0 & & & & & & & & \\
 & & & & & & 10.6 & 69.8 & 28.9 & 10.1 & & & & & & & \\
 & & & & & & & 10.8 & 62.1 & 42.4 & 8.4 & & & & & & \\
 & & & & & & & & 3.0 & 45.2 & 38.9 & 2.7 & & & & & \\
 & & & & & & & & & 2.3 & 44.6 & 16.3 & 2.1 & & & & \\
 & & & & & & & & & & 8.0 & 70.0 & 51.7 & 10.2 & & & \\
 & & & & & & & & & & & 11.0 & 42.9 & 36.7 & 4.8 & & \\
 & & & & & & & & & & & & 3.3 & 51.6 & 47.2 & 4.0 & \\
 & & & & & & & & & & & & & 1.5 & 45.6 & 12.4 & 9.9 \\
 & & & & & & & & & & & & & & 2.4 & 77.9 & 61.9 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & 5.8 & 28.4
\end{pmatrix}\times 10^{-2}$$

$$\boldsymbol{T}^{-1}=\begin{pmatrix}
192 & -154 & 26 & 6 & -6 & 19 & -4 & 1 & & & & & & & & & \\
-52 & 259 & -55 & -2 & 4 & -14 & 3 & -1 & & & & & & & & & \\
9 & -46 & 162 & -93 & 83 & -228 & 44 & -9 & & 2 & -2 & 1 & -1 & & & & \\
-2 & 8 & -28 & 201 & -190 & 539 & -105 & 22 & & -5 & 5 & -1 & 1 & -1 & 1 & & \\
 & -1 & 2 & -13 & 264 & -1043 & 208 & -43 & -1 & 11 & -10 & 2 & -2 & 1 & -1 & & \\
 & & & 2 & -46 & 823 & -174 & 37 & & -9 & 8 & -2 & 2 & -1 & 1 & & \\
 & & & & 3 & -50 & 157 & -42 & 4 & 6 & -6 & 1 & -2 & 1 & -1 & & \\
 & & & & -1 & 8 & -26 & 162 & -74 & 35 & -17 & -3 & -3 & 2 & -1 & & \\
 & & & & & -2 & 5 & -30 & 183 & -171 & 119 & -25 & 26 & -14 & 11 & -1 & -2 \\
 & & & & & & & 2 & -13 & 244 & -219 & 50 & -51 & 27 & -23 & 2 & 4 \\
 & & & & & & & & 1 & -13 & 248 & -69 & 74 & -40 & 34 & -3 & -5 \\
 & & & & & & & & & 2 & -35 & 188 & -235 & 133 & -114 & 10 & 18 \\
 & & & & & & & & & -1 & 10 & -51 & 311 & -217 & 192 & -17 & -29 \\
 & & & & & & & & & & -1 & 3 & -21 & 214 & -221 & 22 & 29 \\
 & & & & & & & & & & & & 1 & -7 & 229 & -36 & -1 \\
 & & & & & & & & & & & & & & -8 & 155 & -334 \\
 & & & & & & & & & & & & & & 2 & -32 & 420
\end{pmatrix}\times 10^{-2}$$

```
10 REM ｷﾞｬｸｷﾞｮｳﾚﾂ
20 REM ﾆｭｳﾘｮｸ
30 READ N
40 PRINT "N=";N
50 DIM A(N,N)
60 FOR I=1 TO N
70 FOR J=1 TO N
80 READ A(I,J)
90 PRINT "A(";I;",";J;")=";A(I,J)
100 NEXT J:NEXT I
110 STOP
120 REM ｾﾞﾝｼﾝ
130 FOR J=1 TO N-1
140 FOR I=J+1 TO N
150 P=A(I,J)/A(J,J)
160 FOR K=1 TO N
170 A(I,K)=A(I,K)-P*A(J,K)
180 NEXT K
190 A(I,J)=-P
200 NEXT I:NEXT J
210 REM
220 FOR I=1 TO N
230 R=A(I,I)
240 FOR J=1 TO N
250 A(I,J)=A(I,J)/R
260 NEXT J
270 A(I,I)=1/R
280 NEXT I
290 REM ｺｳﾀｲ
300 FOR J=2 TO N
310 FOR I=J-1 TO 1 STEP -1
320 Q=A(I,J)
330 A(I,J)=0
340 FOR K=1 TO N
350 A(I,K)=A(I,K)-Q*A(J,K)
360 NEXT K:NEXT I:NEXT J
370 REM ｼｭﾂﾘｮｸ
380 FOR I=1 TO N
390 FOR J=1 TO N
400 PRINT "A(";I;",";J;")=";A(I,J)
410 NEXT J:NEXT I
500 DATA
```

逆行列を求めるプログラム

Program for calculation of inverse matrix.

$\boldsymbol{T}_4^{-1}$は小型計算機によつて求めた．プログラムを上に示す．方法は戸川（1971）に従い，メモリーを最小限に押えている．一般の$\boldsymbol{T}^{-1}$もこれで求めることができる．

応　用　例

大槌川におけるサケの年令組成調査より求められたデータを第1表に示す．このデータに基づいて行なつた計算結果を第2表に示す．tk は平均値を使用した．負の値が出ており，これを消去するには tk，R^* の値を変える必要がある．簡便法は $t2$，$t5$ を考慮した方法と同様の傾向を示しており，これで十分使用に耐えると考える．⑫式より判断して，負の値を消去するには R^* よりも tk の値を変える方が有効である．

考　　察

実際の tk_i の行列を $\boldsymbol{T}$ とする．

$\boldsymbol{T}^{-1}=\boldsymbol{T}_4^{-1}+\Delta(\boldsymbol{T}_4^{-1})$　とおくと，

$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{c}'+\Delta(\boldsymbol{T}_4^{-1})\boldsymbol{r}$

となるので誤差は $\Delta(\boldsymbol{T}_4^{-1})\boldsymbol{r}$ である．大槌川のデータの $\boldsymbol{T}$ と $\boldsymbol{T}^{-1}$ を第3表に示す．$\boldsymbol{T}$ で $t3_i$ と $t4_i$ の値が逆転したり接近している部分では，$\boldsymbol{T}^{-1}$ の対応する部分の値が他と大きくはなれている．それは特に第6列で著しい．このような部分では $\Delta(\boldsymbol{T}_4^{-1})$ の値が大きくなり，負の値をとりやすい．tk_i の値が安定であれば負の値をとることはないと考える．

ま　と　め

$\boldsymbol{T}_4$ と $\boldsymbol{T}_2$ では結果に大差なく，実用面から考えて $\boldsymbol{T}_2$ で十分であると言える．しかし，データによつて負の値をとることがあるが，その場合は，⑬式によつて $t3$，$t4$，R^*_{n+4} の値を変化させて，より適切な値を得ることができる．しかし，つじつま合わせの作業に陥る危険性があり，使用には十分な注意が必要である．

本論を終えるにあたり，助言していただいた東京大学農学部水産学科水産第一講座の方々に深謝します．

文　　献

能勢幸雄・赤嶺達郎・清水　誠（1980）．年令組成不明の場合のサケの回帰率の推定(2)．昭和54年度「溯河性さけ・ますの大量培養技術の開発に関する総合研究」プログレス・レポート　移殖効果の安定強化(2)，日本海区水研：51-59.

戸川隼人（1971）．マトリクスの数値計算．オーム社，東京，323pp.